802. D’Amore B., Fandiño Pinilla M. I. (2013). Il passo più lungo. Sulla necessità di non buttare a mare (in nome di un vacuo modernismo) teorie di didattica della matematica che spiegano, in maniera perfetta, situazioni d’aula reali. *Bollettino dei docenti di matematica*. [Bellinzona, Svizzera]. 66, 43-52. ISBN: 978-88-86486-88-0.

Il passo più lungo

Sulla necessità di non buttare a mare (in nome di un vacuo modernismo) teorie di didattica della matematica che spiegano, in maniera perfetta, situazioni d’aula reali

Bruno D’Amore – Martha Isabel Fandiño Pinilla
NRD, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia
Mescud, Universidad Francisco José de Caldas, Bogotà, Colombia

Sunto. Si avverte presso alcuni istituti di ricerca e presso alcuni ricercatori un atteggiamento di rottamazione di vecchie teorie che, pur essendo perfettamente in grado di rispondere a domande di ricerca, sono solo colpevoli di essere datate. Ma non sempre le teorie più recenti sono nate per rispondere agli stessi interrogativi di ricerca delle precedenti, e dunque non le inglobano e non le sostituiscono ma, semplicemente, le integrano. Noi riteniamo che un modernismo fine a sé stesso nuoccia alla competenze sulla didattica della matematica delle future generazioni di ricercatori e di utilizzatori (come, per esempio, gli insegnanti).

Abstract. At some research institutes and among some researchers there is an attitude of scrapping of old theories that, despite being perfectly able to answer research questions, are only guilty of being dated. But the most recent theories do not always have emerged to respond to the same research questions of the previous ones, and therefore they do not incorporate and do not replace them, but simply supplement them. We believe that a modernism that is an end in itself harms the skills in mathematics education of future generations of researchers and users (such as, for example, teachers).

Resumen. Hay en algunos institutos de investigación y en algunos investigadores una actitud de destrucción de las viejas teorías que, a pesar de ser perfectamente capaces de responder a preguntas de investigación, sólo son culpables de ser anticuadas. Pero no siempre las teorías más recientes han surgido en respuesta a las mismas preguntas de investigación de las precedentes, y por lo tanto no las incorporan y no las sustituyen, sino que simplemente los complementan. Creemos que un modernismo sin verdaderos fines sea perjudicial para las competencias en educación matemática de las futuras generaciones de investigadores y de los usuarios (como, por ejemplo, maestros).

1. I fatti

Nell’anno scolastico 2008 – 2009, tra le prove nazionali italiane invalsi di matematica destinate agli studenti delle classi quinte di Scuola Primaria, appariva la seguente proposta:

> D9. Maria, Renata e Fabio misurano a passi la lunghezza della loro aula. Maria conta 26 passi, Renata ne conta 30 e Fabio 28. Chi ha il passo più lungo?
> □ A. Renata.
> □ B. Fabio.
> □ C. Maria.
> □ D. Non si può sapere.

I risultati nazionali in percentuale sono stati i seguenti:
mancata risposta: 0,2

A: 42,9
B: 2,2
C: 49,5
D: 5,1.
A prima vista, il risultato è eccellente: il 49,5% di studenti italiani dà la risposta esatta.
Ma, se si legge da un altro punto di vista, il 50,5% di studenti italiani NON dà la risposta esatta ad un problema che nulla ha a che vedere con le competenze / conoscenze matematiche ma solo con il buon senso e con la capacità di leggere un testo e di immaginarsi la situazione.
Lasciamo pure stare quello 0,2% che non dà risposta, quel 2,2% che dà una risposta del tutto fuori di luogo e quel 5,1% che, non sapendo che cosa rispondere, si rifugia nella classica scappatoia "Non si può sapere"; e puntiamo invece tutta l'attenzione sulle due risposte che hanno un certo senso:

- senso corretto, quello sperato (risposta C): ha il passo *più* lungo chi fa *meno* passi per misurare l'aula: 49,5% di risposte;
- senso sbagliato (risposta A): ha il passo *più* lungo chi ha fatto *più* passi per misurare l'aula: 42,9% di risposte.

Abbiamo chiesto commenti su questo risultato a insegnanti di matematica di diversi livelli, a genitori non insegnanti, a colleghi matematici nulla aventi a che fare con la ricerca in didattica della matematica; commenti informali, beninteso, solo per capire che tipo di percezione essi hanno di questo risultato. Facile immaginare le risposte: la "colpa" è degli studenti che "non sanno più leggere" e che "non sanno concentrarsi"; poi della scuola che "non insegna più a ragionare"; e poi degli insegnanti che "non sanno insegnare" e "pretendono sempre meno". Sono commenti così ovvii e scontati che nemmeno ci mettiamo ad esaminarli.
Abbiamo chiesto il parere, in particolare, ad insegnanti di livello primario, i più interessati al risultato; in questo caso appare una spiegazione del fenomeno che non faceva capolino negli altri casi, una lamentela su come le prove proposte dall'invalsi siano "diverse da quelle cui gli studenti sono abituati"; il D9 rientra fra i problemi poco comuni, una specie di trabocchetto diabolicamente teso agli studenti; riportiamo una frase, fra tutte: «Noi i bambini li abituiamo a certe situazioni problematiche, e in quelle loro sono bravi e competenti; poi arrivano queste e loro non le riconoscono».
Dunque, esistono "situazioni problematiche costruite secondo un certo accordo fra bambini e insegnanti" e "situazioni problematiche diverse da quelle, dunque inattese".

2. Le prove e i risultati

Abbiamo rifatto il test esattamente identico in Colombia, in Spagna, a Cipro, in Francia ed in altri Paesi; i risultati ottenuti sono sostanzialmente identici.[1]
L'estremo "negativo" è il seguente, effettuato su un totale di 83 studenti:
mancata risposta: 0% - A: 89,2% - B: 3,6% - C: 6% - D: 0% - risposta multipla: 1,2%.
Riportiamo i test proposti agli studenti, nelle diverse lingue:[2]

Spagnolo:
D9. Maria, Renata y Fabio miden a pasos la longitud de su aula. María cuenta 26 pasos, Renata cuenta 30 y Fabio 28. ¿Quién tiene el paso más largo?
□ A. Renata.
□ B. Fabio.

[1] Per la raccolta di questi dati ringraziamo per la loro gentile collaborazione alcuni colleghi: tra questi soprattutto Angélica Molano, Clara Rivera e Deissy Narváez.
[2] Ringraziamo i colleghi dei vari Paesi per la preziosa collaborazione.

□ C. María.
□ D. No se puede saber

Francese:
D9. Marie, Renata et Fabio mesurent avec ses pas la longueur de leurs salle. Marie compte 26 pas, Renata compte 30 et Fabio 28. Qui a le pas le plus long?
□ A. Renata.
□ B. Fabio.
□ C. Marie.
□ D. On ne peux pas le savoir.

Inglese:
D9. Mary, Renata and Fabio measure with their steps the length of the classroom. Mary counts 26 steps, Renata counts 30 and Fabio 28. Who has the longest step?
□ A. Renata.
□ B. Fabio.
□ C. Mary.
□ D. You can not know.

Sorprende il fatto che la somma delle percentuali date alle risposte diverse dalla corretta (C) siano sostanzialmente identiche? No, non ci sorprende affatto.

Abbiamo provato a dialogare con alcuni di questi bambini, tutti attorno ai 10 anni di età, per cercare di capire quali fossero eventuali cause *legate al testo*. È facile vedere, infatti, che il testo è viziato da quelli che si chiamano "dati impliciti" o "supposti"; per esempio, non è detto che i bambini appartengano alla stessa classe e che stiano misurando la stessa aula. La ricerca ha molto bene messo in evidenza che molti dei testi degli esercizi e dei problemi proposti nelle aule sono inficiati da questo vizio e che i bambini si reinventano implicitamente il testo proposto, riformulandolo in modo spontaneo, più consono alle loro esigenze; anzi, la ricerca ha evidenziato questo fatto chiedendo esplicitamente ai bambini di riformulare i testi dei problemi per poterli rendere adatti e più facilmente risolubili a bambini di altre classi. Si veda, per esempio, D'Amore et al. (1995).
Ma le interviste (informali) mettono in evidenza che tutti i risolutori hanno senza alcuna ombra di dubbio ipotizzato, in accordo con l'anonimo estensore del testo invalsi, che i tre bambini stessero misurando la loro stessa aula, anzi che appartenessero alla stessa classe, anzi (secondo molti) che fossero amici.
Dunque, il problema non è questo. C'è dell'altro.

3. La teoria delle situazioni e il contratto didattico

La teoria delle situazioni, ideata da Guy Brousseau fin dalla fine degli anni '60 e resa oggetto condiviso di studio internazionale fin dai primi anni '80, spiega perfettamente quel che succede.
Ci sono accordi non detti, non espliciti che fanno sì che insegnanti ed allievi costruiscano modalità di interpretazione dei test e di soluzione degli stessi. La teoria è talmente nota che ci sembra offensivo stare qui a spiegare oltre.
Le tipiche indicazioni normative che l'insegnante dà allo studente, "leggi bene il testo", "individua i dati utili", "leggi la domanda" etc., costringono senza alcuna possibilità di scampo il bambino-solutore a disinserire la sua capacità logico - critica basata sull'esperienza anche extra scolastica (più lunghi sono i passi, minore è il numero che esprime la misura della stanza) e farsi carico di clausole implicite: "più lunga uguale più passi" (non importa di che cosa si stia parlando), senza

prendere in esame la situazione, ma solo afferrando acriticamente le consegne numeriche. Cioè si guardano i numeri e la relazione fra essi, non il significato semantico della proposta e della situazione proposta.
La famosa frase di un bambino infuriato perché il ricercatore-insegnante lo costringeva a ragionare invece che a risolvere («Uffa, ma io devo risolvere il problema, non devo ragionare»), la dice lunga sul comportamento contrattuale che il bambino assume.
Nel nostro problema ci sono dei dati, tre numeri: 26, 30, 28; e una domanda che contiene la frase: "più lungo". Per 5 anni i bambini sono stati invitati a ragionare sul fatto che "più lungo" sta in sintonia con "maggiore", che si indica con >; mettiamo in ordine i tre numeri: 30>28>26. La risposta non può che essere 30. Nulla importa la condizione descritta, nulla la logica invocata dal testo: si devono rispettare gli accordi presi con l'insegnante.
Ma, ripetiamo, queste cose sono così note che non andiamo oltre; riteniamo che tutti i nostri lettori le conoscono e le sappiano applicare criticamente a questa situazione.

La cosa che può colpire è il fatto che gli insegnanti vivano come "trabocchetto teso ai bambini" il test proposto, perché non corrisponde agli standard, alla domanda che, secondo molti di loro, sta alla base dell'attività di risoluzione dei problemi: qual è l'operazione aritmetica (razionale) da fare?
La maggior parte degli insegnanti intervistati dice esplicitamente che loro insegnano ai bambini a riconoscere se, nella risoluzione di un problema, va usata l'addizione, o la sottrazione, o la moltiplicazione, o la divisione. Ed i libri di testo rispondono infatti a questa scelta didattica, distinguendo fin dalla prima primaria sezioni con esercitazioni nella modalità seguente: problemi di addizione, problemi di sottrazione etc.; anzi, spesso appaiono anche sezioni così titolate: problemi impossibili, problemi con dati mancanti, problemi con dati sovrabbondanti (mancano quasi sempre i problemi con dati contraddittori che non sono mai piaciuti agli insegnanti fin dalla loro proposta nei cosiddetti Nuovi Programmi per la Scuola Elementare del 1985; qualcuno li include fra i problemi impossibili) (D'Amore, Sandri, 1993).
In queste situazioni, dopo 5 anni di condizionamento e di insegnamento, che cosa può fare un allievo, se non comportarsi secondo contratto?
Dicevamo sopra che questo comportamento e questa reazione degli insegnanti potrebbe sorprendere, ma noi non siamo affatto sorpresi. Tutto, tutto ciò, è parte degli studi rivelatori di Guy Brousseau e dei suoi allievi, all'interno della teoria delle situazioni. Fenomeni ben spiegati scientificamente, in modo dettagliato, senza ombra di dubbio, senza scappatoie (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sarrazy, 2010).

4. Le teorie successive

La teoria delle situazioni è stata una delle prime a nascere, tutti noi ricercatori in didattica della matematica di una certa età ne siamo stati affascinati; era la prima volta che dei matematici facevano riflessioni di questo tipo sull'apprendimento della matematica.
Ma poi la didattica della matematica si è evoluta, e sono nate tante altre teorie, inutile elencarle qui: ne vedremo brevemente qualcuna fra poco. Molte di esse sono evoluzioni della teoria delle situazioni, altre esaminano questioni diverse; alcune sono nate e defunte, altre si sono sviluppate in maniera impensabile.
Le teorie nascono e muoiono, si possono porre tra loro in contrasto o cercare di collegare o addirittura far collimare facendole aggregare in teorie più comprensive. Sono molti gli studi in questa direzione, noi ci limitiamo solo a citare: Prediger, Bikner-Ahsbahs, Arzarello (2008), Radford (2008a, b, 2011), Bikner-Ahsbahs, Dreyfus, Kidron, Arzarello, Radford, Artigue, Sabena (2010).

Ma le teorie nuove nascono con scopi ben precisi, non solo per assorbire ed includere le teorie precedenti, ma per studiare fatti che alle precedenti sfuggivano o per studiare fatti che alle precedenti non interessavano (D'Amore, 2007).
Così, teorie costruite successivamente a quella delle situazioni hanno avuto scopi diversi, sono state ben accettate nel panorama dei ricercatori internazionali, ma non hanno sostituito la teoria delle situazioni perché avevano altri scopi.
Per esempio, la teoria APOS (che descrive come le Azioni vengono interiorizzate nei Processi e poi incapsulate come Oggetti mentali, che prendono il loro posto in più sofisticati Schemi cognitivi) (Tall, 1999), creata da Ed Dubinski negli anni '80, ha avuto grande successo internazionale (e grandi critiche), ma tra i suoi scopi non c'è quello di capire le situazioni d'aula così come riesce a fare la teoria delle situazioni.
Per esempio, il grande apparato introdotto da Raymond Duval attorno al 1993 per mostrare come le attività di insegnamento – apprendimento della matematica in aula siano fortemente connesse con le tre azioni cognitive di rappresentare, trattare, convertire della semiotica, ha portato alla nostra disciplina frutti eccellenti, ma nulla aventi a che fare con le descrizioni che la teoria delle situazioni ci ha insegnato ad osservare e riconoscere (Duval, 1993, 1995).
Per esempio, la teoria EOS (Enfoque Onto Semiotico) ha un grande successo internazionale da quando fu creata lungo il corso degli anni '90 da uno dei gruppi di ricerca operanti presso l'università di Granada, quello con a capo Juan Godino; tale teoria ingloba la cosiddetta TAD (teoria antropologica della didattica) creata da Yves Chevallard nei primi anni '90, ma ha scopi dichiarati diversi da quelli della teoria delle situazioni (D'Amore, Godino, 2006, 2007; Font, Godino, D'Amore, 2007).
Per esempio, la teoria semiotico culturale di Luis Radford ha la capacità di spiegare modalità di apprendimento relazionate con attività semiotiche da parte degli studenti, per esempio nell'apprendimento della generalizzazione, che nessuna delle teorie precedenti ha, ma non include lo studio generale delle situazioni d'aula, che le sono estranee. Indubbiamente si tratta di una delle teorie che, più delle altre, ha cambiato il nostro atteggiamento di fronte all'apprendimento e alla didattica della matematica; in pochi anni si è imposta con una autorevolezza che lascia stupiti, tanto che non è facile ricostruirne la storia (cosa che noi abbiamo fatto, anche chiedendo aiuto allo stesso creatore: Radford, 1998, 2000a, b, 2001, 2003, 2006a, b).
E così via, potremmo continuare a lungo a citare teorie che hanno fatto seguito alla teoria delle situazioni, con le loro caratteristiche innovative e funzionali, a volte solo descrittive, a volte operative.

Ora, l'atteggiamento che si riscontra presso alcuni centri di ricerca e presso alcuni ricercatori e docenti di didattica della matematica di snobbare le teorie di una certa età a favore delle nuove è a dir poco ridicolo; uno degli articoli di Radford, presentato alla stampa nel 1998 uscì solo nel 2003 perché a quel tempo la maggior parte delle riviste di didattica della matematica rifiutava senza appello gli articoli che parlavano di semiotica; dobbiamo dire che, ancora nel 2005, uno degli autori di questo articolo incontrò una certa difficoltà a pubblicare un suo lavoro perché, diceva un referee "si cita troppo Raymond Duval" (abbiamo conservato quella lettera).[3]
Ma questo è quel che succede sempre, agli anticipatori; Guy Brousseau cominciò ad elaborare la sua teoria che poi ha avuto fortuna internazionale già negli anni '60, e nei '70 era già matura; ma gli toccò aspettare il 1986 per vedersi pubblicato il suo più famoso articolo, forse il più citato articolo al mondo del nostro settore (Brousseau, 1986). Il fatto è che negli anni '60 e '70 le riviste di, diciamo così, didattica della matematica, rifiutavano articoli così "strampalati e strani" come venivano allora giudicati i suoi; gli toccò pubblicare su una *Revue de laryngologie, otologie, rinologie* (Brousseau, 1980)! A quei tempi, i nomi che dettavano legge erano quelli di Zoltan Dienes, Georges e Frédérique Papy, … i quali, più che creare teorie, proponevano sistemi di

[3] L'articolo uscì comunque nel 2006.

insegnamento a volte bizzarri basati su proprie intuizioni. Gli studi di Brousseau dedicati a stroncare duramente questi approcci all'insegnamento della matematica sono ben noti ed hanno avuto un esito evidente: chi ricorda più questi nomi? Senza una teoria scientificamente basata su approcci epistemologici sensati e fondati, questi episodi sono destinati a perdersi.
Ma le teorie solide, quelle che danno risultati, quelle che permettono di capire l'atteggiamento di studenti e insegnanti nelle situazioni d'aula, non vanno dimenticate, anzi vanno messe alla base, all'inizio, di qualsiasi corso che possa servire a chi di queste teorie deve far uso concreto in aula, gli insegnanti, e ai futuri ricercatori (stiamo parlando, rispettivamente, di corsi per insegnanti in formazione iniziale o in servizio, e di corsi di master o dottorato). Altrimenti, un giorno, qualcuno crederà di scoprire quelle cose, ignaro che erano già state studiate, darà loro un nome nuovo, credendo di proporre un avanzamento nello studio della didattica della matematica.
Il che sarebbe ridicolo assai.
Sarebbe come ri-scoprire che esistono formule generali che usano solo operazioni razionali ed estrazione di radice quadrata per trovare le radici delle equazioni algebriche generali di III grado a coefficienti interi o razionali, con buona pace di Tartaglia e Cardano.

5. Ma non c'è solo la teoria delle situazioni …

Sempre traendo spunto dalle prove Invalsi, visto che se ne parla tanto … Nel 2012, in I media, è stato dato il seguente quesito:

Quale delle seguenti operazioni dà il risultato più grande?
□ A. 10×0,5
□ B. 10×0,1
□ C. 10:0,5
□ D. 10:0,1

Ed ecco il risultato ottenuto su un campione di oltre 20.000 studenti:
A: 71,2%; B: 4,9%; C: 10,0%; D: 10,8%; Non risponde: 2,2%.
Meraviglia, sorpresa, sconforto, rabbia da parte degli insegnanti? No, ovvia risposta da parte degli studenti, diciamo noi. Se ci avessero chiesto in via preventiva quale sarebbe stato il risultato, lo avremmo azzeccato in pieno.
Nel libro D'Amore (1999), non a caso pubblicato anche in spagnolo e portoghese, nei capitoli 4, 5 e 12, si spiega esattamente che cosa si nasconde dietro questa risposta così gettonata, chiamando in causa tre tipologie di ricerche:
(1) la teoria delle immagini e dei modelli nella costruzione della conoscenza matematica,
(2) gli studi affascinanti e precisissimi di Efraim Fischbein (1920 - 1998),
(3) alcune considerazioni di Gérard Vergnaud dei primi anni '80.
Tutto spiegato in poche pagine, tanto che non vale la pena di entrare qui in dettagli.
Ma questo tipo di considerazioni, che spiegano benissimo il comportamento degli studenti, non sono più "di moda", quasi non si insegnano più nei corsi di didattica della matematica, si danno per scontate; ed è un atteggiamento sbagliato, controproducente.
Se gli insegnanti di scuola primaria e media conoscessero queste teorie, saprebbero che cosa fare per evitare la scelta massiccia della risposta A:
(1) aspettare a far creare agli studenti il modello (sbagliato) di moltiplicazione, lasciarlo ancora come una immagine che opera in N^2 in attesa di ampliare il dominio numerico a Q,
(2) abbandonare lo stereotipo di "schieramento" come unico modello figurale intuitivo della moltiplicazione, fornendo invece altri modelli intuitivi per un unico modello formale, ed evitare in tutti i modi il sorgere di modelli parassiti,

(3) allargare l'insieme delle situazioni che danno senso alle situazioni di moltiplicazione e divisione.
E così abbiamo citato implicitamente le tre teorie di base.
Ma se queste cose non si insegnano agli insegnanti in formazione e in servizio, continueremo ad avere la risposta A, continueremo a stracciarci le vesti in segno di furiosa reazione, continueremo a dare la "colpa" a degli studenti che abbiamo formato noi e che abbiamo obbligato noi a rispondere A, credendo (e qui esplode l'ironia) di fare il loro bene.

Testi citati

Bikner-Ahsbahs A., Dreyfus T., Kidron I., Arzarello F., Radford L., Artigue M., Sabena C. (2010). Networking of Theories in Mathematics Education. In: Pinto M.F., Kawasaki T.F. (Eds.). *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1, 145-175. Belo Horizonte, Brazil: PME.

Brousseau G. (1980). Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de laryngologie, otologie, rinologie*. 101, 3-4, 107-131.

Brousseau G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 7, 2, 33-115.

D'Amore B. (1996). *Elementi di didattica della matematica*. Prefazione di Colette Laborde. Bologna: Pitagora. I premio assoluto nazionale di pedagogia 2000: *Lo stilo d'oro*. [Versione in lingua spagnola ampliata ed aggiornata: 2006, *Didáctica de la matemática*. Prefazioni di Colette Laborde, Guy Brousseau e Luis Rico Romero. Bogotà: Magisterio]. [Versione in lingua portoghese ampliata ed aggiornata: 2007, *Elementos de didáctica da matemática*. Prefazioni di Colette Laborde, Guy Brousseau, Luis Rico Romero e Ubiratan D'Ambrosio. São Paulo: Livraria da Física].

D'Amore B., Franchini D., Gabellini G., Mancini M., Masi F., Matteucci A., Pascucci N., Sandri P. (1995). La ri-formulazione dei testi dei problemi scolastici standard. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 18A, 2, 131-146. [Questo articolo è stato ristampato in lingua inglese su: Gagatsis A., Rogers L. (Eds.) (1996). *Didactics and History of Mathematics*. Erasmus ICP 954 G 2011/11. Thessaloniki. 53-72].

D'Amore B., Godino D.J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 9-38.

D'Amore B., Godino D.J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en Didáctica de la Matemática. *Relime*. 10, 2. 191-218.

D'Amore B. (2007). Voci per il dizionario: Frabboni F., Wallnöfer G., Belardi N., Wiater W. (Eds.) (2007). *Le parole della pedagogia. Teorie italiane e tedesche a confronto*. Torino: Bollati Boringhieri. Voci: Didattica disciplinare (pp. 72-75), Formazione in scienze naturali (pp. 140-142), Formazione in matematica (pp. 145-147), Scienza (pp. 335-337). [Esiste una versione di questo testo in lingua tedesca].

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sarrazy B. (2010). *Didattica della matematica. Alcuni effetti del "contratto"*. Prefazione e postfazione di Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri.

D'Amore B., Sandri P. (1993). Una classificazione dei problemi cosiddetti impossibili. *La matematica e la sua didattica*. 3, 344-346. [Questo articolo è stato ristampato in: Gagatsis A. (Ed.) (1994). *Didactiché ton Mathematicon*. Erasmus ICP 93G 2011/II. Thessaloniki. 247-252 (in greco), 579-584 (in francese). Questo articolo è stato inoltre ristampato su: *Cahiers de Didactique des Mathématiques*. 16-17, giugno 1995, 11-28 (in greco), 103-110 (in francese)].

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Font V., Godino D.J., D'Amore B. (2007). An onto-semiotic approach to rappresentations in mathematical education. *For the learning of mathematics*. 27, 2, 2-7 and 14.

Prediger S., Bikner-Ahsbahs A., Arzarello F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education.* 40, 165-178.

Radford L. (1998). On Signs and Representations. A Cultural Account. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. 35 (1), 277-302.

Radford L. (2000a). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*. 42 (3), 237-268.

Radford L. (2000b). Students' processes of symbolizing in algebra. A semiotic analysis of the production of signs in generalizing tasks. In: Nakahara T., Koyama M. (Eds.) (2000). *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME-24). Hiroshima University, Japan. 4, 81-88

Radford L. (2001). Factual, Contextual and Symbolic Generalizations in Algebra. In: Marja van den Hueuvel-Panhuizen (Ed.) (2001). *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Freudental Institute, Utrecht University, The Netherlands. 4, 81-88.

Radford L. (2003). On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. In: Anderson M., Sáenz-Ludlow A., Zellweger S., Cifarelli V. (Eds.) (2003). *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*. Ottawa: Legas Publishing. 49-79.

Radford L. (2006a). Elements of a Cultural Theory of Objectification. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics*, Radford L., D'Amore B. (Eds.), *Culture and Mathematical Thinking*. 103-129.

Radford L. (2006b). Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics,* Radford L., D'Amore B. (Eds.), *Culture and Mathematical Thinking*. 7-21.

Radford L. (2008a). Theories in mathematics education: A brief inquiry into their conceptual differences. ICMI 11 Survey Team 7. *The notion and role of theory in mathematics education research*. Working paper.

Radford L. (2008b). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education.* 40, 317–327.

Radford L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas [The evolution of paradigms and perspectives in research. The case of mathematics education]. In: Vallès J., Álvarez D., Rickenmann R. (Eds.) (2011). *L'activitat docente: intervenció, innovació, investigació* [*Teacher's activity: Intervention, innovation, research*]. Girona (Spain): Documenta Universitaria. 33-49.

Tall D. (1991). Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. In: Zaslavsky O. (Ed.) (1991). *Proceedings of the 23rd Conference of PME, July 1999*. Haifa, Israel. 1, 111–118.